

viernes, 10 de junio de 2022

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^4}$$

continua en $]0, \frac{\pi}{2}]$

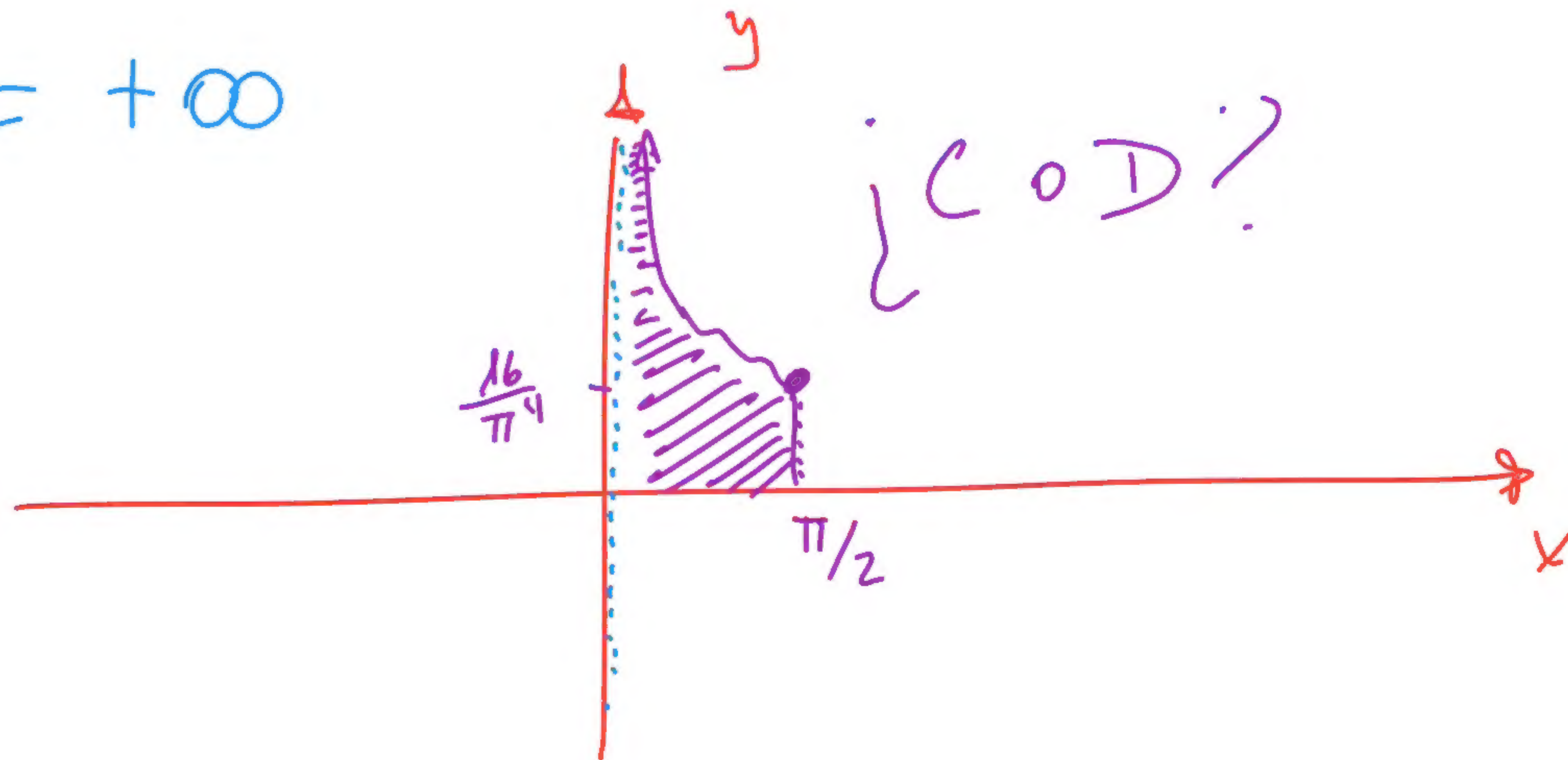
$$\left(f(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in]0, \frac{\pi}{2}] \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x^4} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{x^3} \right)$$

$$= +\infty$$

¿C o D?

Sego investigando



Como $f(x) = \frac{\text{Sen } x}{x^4} \geq 0 \quad \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ y es cont.

en $]0, \frac{\pi}{2}]$ podemos aplicar crit. de comparación por límite con la función $g(x) = \frac{1}{x^p} \geq 0, \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ con $p > 0$, de la cual se conoce que:

•) Si $0 < p < 1$ converge

•) Si $p \geq 1$ diverge

En efecto:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{\text{Sen } x}{x^4}}{\frac{1}{x^p}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^p \text{Sen } x}{x^4} \right) = 1 \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \quad \text{si } p=3$$

Como $p = 3 \geq 1 \Rightarrow \int_0^{\pi/2} g(x) dx$ diverge

\therefore también diverge $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x^4} dx$

Note que :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x^p \cdot \operatorname{sen} x}{x^4} \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^3} \right]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^p}{x^3} \right] \Rightarrow$$

Si $p=3 \Rightarrow L=1 \quad \therefore \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^4} dx$ Diverge

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\frac{\sin x}{x^4}}{\left(\frac{1}{x^p}\right)} \right]$$

Si $p > 3 \Rightarrow L=0$, como $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^p} dx$

divergen para $p \geq 1 \Rightarrow$ el
criterio NO APLICA

Si $p < 3 \Rightarrow L = \infty$, como

$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^p} dx$ diverge para $p \geq 1 \Rightarrow$

$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^4} dx$ DIVERGE tomando $p \in [1, 3[$

Integrales Eulerianas

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

converge $\forall p > 0$

Propiedades:

① $\Gamma(1) = 1$

En efecto:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-e^{-x} \right]_0^a = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{e^a} + 1 \right] = 1$$

② $\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$, $\forall p > 1$

Prueba:

$$\Gamma(p) := \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

Para $p > 1$:

$$\Gamma(p) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\underbrace{\int_0^a x^{p-1} e^{-x} dx}_A \right]$$

$$A = \int_0^a x^{p-1} e^{-x} dx$$

$$\text{Sea } u = x^{p-1} \Rightarrow du = (p-1) x^{p-2} dx$$

$$dv = e^{-x} dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$A = \left(-e^{-x} \cdot x^{p-1} \right) \Big|_0^a + \int_0^a (p-1) x^{p-2} e^{-x} dx$$

$$A = \left(-\frac{a^{p-1}}{e^a} + \underbrace{e^0 \cdot 0^{p-1}}_0 \right) + \int_0^a (p-1) x^{p-2} e^{-x} dx$$

pues $p-1 > 0$
 $p > 1$

Luego:

$$\Gamma(p) = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[-\frac{a^{p-1}}{e^a} + (p-1) \int_0^a x^{(p-1)-1} e^{-x} dx \right]$$

Por un lado: i) $\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\int_0^a x^{(p-1)-1} e^{-x} dx \right) := \int_0^\infty x^{(p-1)-1} e^{-x} dx := \Gamma(p-1)$
para $p > 1$

$$ii) \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{a^{p-1}}{e^a} \right) = L, \quad p > 1$$

Por L'Hôpital :

$$L = \lim_{a \rightarrow \infty} \left(-\frac{(p-1) a^{p-2}}{e^a} \right)$$

Se puede seguir aplicando L'Hôpital hasta que a^{p-m} baje al denominador y entonces evaluamos

$$L = 0$$

$$\therefore \Gamma(p) = 0 + (p-1) \Gamma(p-1)$$

$$\Gamma(p) = (p-1) \Gamma(p-1)$$

$$\forall p > 1$$